

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه برابر

فعالیت

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟

$$B = \{2, 4, 6\}$$

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان‌اند و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B

برابرند و می‌نویسیم  $A = B$

$$x - 1 + x + x + 1 = 27 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = 9$$

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

- الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰  $A = \{7, 8, 9\}$   $\times$
- ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱  $\checkmark \{8, 9, 10\}$
- ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.  $\checkmark \{8, 9, 10\}$

همان‌طور که دیدید، مجموعه  $\{8, 9, 10\}$  با مجموعه  $\{7, 8, 9\}$  برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم  $A \neq B$ .

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

$$\left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \frac{\sqrt{25}}{6} \right\}$$

$\epsilon = \frac{14}{2} = 7$

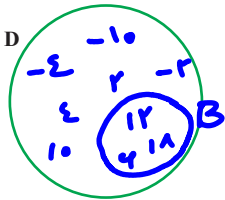
$$\left\{ \sqrt{7}, \frac{7}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{1}{9}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{25}} \right\} = \left\{ \sqrt{7}, \frac{7}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{5} \right\} \quad \text{ب}$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$$A = \left\{ \sqrt{16}, \frac{4}{3} \right\} \quad B = \{ 2, 1, 5 \}$$

زیر مجموعه

## فعالیت



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید:

$$D = \{ -10, -4, -2, 2, 4, 10, 12, 18 \}$$

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ **بله**

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا  $D = C$ ؟ **بله**

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B **زیرمجموعه** D است و می‌نویسیم  $B \subseteq D$ .

آیا مجموعه C زیرمجموعه D است؟ **بله**

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم:  $A \subseteq A$ .

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟ **خیر**

$$\neq D$$

آیا عبارت  $\{ 1, 4, 7, 2 \} \subseteq D$  درست است؟ چرا؟ **خیر**

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم  $B \not\subseteq A$ .

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ **خیر**

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی:  $\emptyset \subseteq A$ .

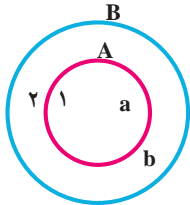
مثال: دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف)  $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعه سمت چپ،  $d$  هست که در مجموعه سمت راست

نیست.

ب)  $\{-1, 2\} \subseteq \{1, 3, 0, 4\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه

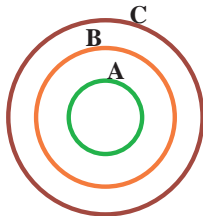
سمت راست است.



$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل  $A \subseteq B$  درست است؛ زیرا همه عضوهای  $A$  در  $B$  قرار دارند و  $B \not\subseteq A$  درست است؛ زیرا عضوی در  $B$  مانند  $2$  می‌توان یافت که در  $A$  وجود ندارد.

### کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر

را مشخص کنید:

$C \not\subseteq A$  ✓,  $B \subseteq A$  ✗,  $A \not\subseteq C$  ✗  
 $A \subseteq B$  ✓,  $B \subseteq C$  ✓,  $\emptyset \subseteq A$  ✓

۲- مجموعه‌های  $A, B, C$  را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$A = \{1, 3, 6, 4\}$  ,  $B = \{5, 1, 3\}$  ,  $C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$

$B \not\subseteq A$  ✓,  $3 \in B$  ✗,  $A \subseteq B$  ✗,  $B \subseteq C$  ✓,  $A \not\subseteq C$  ✓,  $2 \in A$  ✗

$\{1, 4\} \in A$  ✗,  $6 \notin A$  ✗,  $\{5, 6\} \subseteq C$  ✓,  $5 \in C$  ✓,  $0 \in A$  ✗

۳- همه زیرمجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  در زیر نوشته شده است:

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$  ✓

مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲.

$\{9, 10, 11, 12\}$  ✓

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

$\{9, 10, 11, 12\}$  ✓

مجموعه عددهای طبیعی را با  $\mathbb{N}$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون نمایش مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار ون آموخته‌اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت  $2k$  قابل نمایش است که در آن  $k \in \mathbb{N}$ ، پس می‌نویسیم:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم  $E$  برابر است با مجموعه عددهایی به شکل  $2k$  به طوری که  $k$  متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه  $E$  علامت « $\mid$ » خوانده می‌شود: «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد:  $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب)  $A = \{7, 8, 9, 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\}$

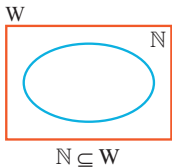
ج) زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{N}$  که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است:  $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه  $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$  را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای  $n$  یک عدد طبیعی در  $5n + 3$  قرار دهید.

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$	$\frac{5(1)+3}{8}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{18}$	$\frac{5(4)+3}{23}$				...

بنابراین داریم:  $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



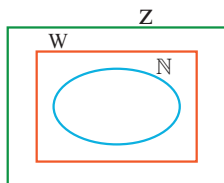
مجموعه عددهای حسابی را با  $W$  نمایش می‌دهند:  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی  $\mathbb{N} \subseteq W$



مجموعه عددهای صحیح را با  $\mathbb{Z}$  نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو  $\mathbb{Z}$  هم هستند؛ پس:  $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

## کار در کلاس

$$A = \{-8, -6, -4, \dots, 4\}$$

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید:

(ب)  $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

(الف) مجموعه عددهای صحیح فرد

$$B = \{-1, 2, 5, \dots\}$$

(ج)  $B = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم:  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم:  $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه  $\mathbb{Z} \subseteq Q$ .

## تمرین

$$B = C$$

۱- مجموعه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟  $B = \{-1, 0, 1\}$      $C = \{-1, 0, 1\}$      $D = \{-1, 1\}$

$B = \{x | x \in A, x^2 \leq 2\}$  ,  $C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$  ,  $D = \{x | x \in A, x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید؛ به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ . آیا می‌توان نتیجه

گرفت  $A \subseteq C$ ؟  $A = \{1\}$  ,  $B = \{1, 2\}$  ,  $C = \{1, 2, 3\}$

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

(الف)  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\}$     (ب)  $B = \{x | x = 0, 2, 3\}$      $A = \{1\}$      $B = \{0, 4, 4\}$      $C = \{0, 2, 4, 4\}$      $D = \{0, 2, 4, 4, 4\}$      $E = \{0, 2, 4, 4, 4, 4\}$      $F = \{0, 2, 4, 4, 4, 4, 4\}$

۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های  $W, Q, \mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z}$

را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت  $\subseteq$  باهم

مقایسه کنید.  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

۵- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید:

(ب) هر عدد حسابی عددی گویاست. ✓

(الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ✗

(د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند. ✓

(ج) هر عدد صحیح عددی گویاست. ✓