درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به‌کار برد.

اگر مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن را S، مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمالِ رخ دادن پیشامد A را با نماد P(A) نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال : اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اوّل باشد.

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل : الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم :

$$A=\{۳,۶\}\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\};\ n(A)=۲\ ,\ n(S)=۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اوّل ; $B=\{۲,۳,۵\};\ n(B)=۳$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

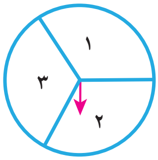
ج) C : پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ ; $C=\varnothing \rightarrow n(\varnothing)=۰$

$$P(C)=P(\varnothing)=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) D : پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ ; $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=S$

$$P(D)=P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

فعالیت



با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

$S = \{۱, ۲, ۳\}$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$A = \{۳,۱\}$ (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B = \{۱,۲\}$ عقربه روی عدد کوچکتر از ۳ بایستد

$C = \{۲,۳\}$ عقربه روی عددی اول بایستد $\qquad D = \{۲\}$ عقربه روی عددی زوج بایستد

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس‌اند؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

$\varnothing \rightarrow$ احتمال $= ۰$

$\{۱\} \rightarrow$ احتمال $= \frac{۱}{۳}$

$\{۲\} \rightarrow$ " "

$\{۳\} \rightarrow$ " "

هم شانس

$\{۱,۲\} \rightarrow$ احتمال $= \frac{۲}{۳}$

$\{۱,۳\} \rightarrow$ " "

$\{۲,۳\} \rightarrow$ " "

هم شانس

$\{۱, ۲, ۳\} \rightarrow$ احتمال $= ۱$

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

$A = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \rightarrow n(A) = ۴$

$n(S) = ۱۰ \qquad P(A) = \frac{۴}{۱۰}$

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخدادِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد.

عدد روی کارت زوج و کوچکتر از ۹ باشد

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اوّل و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس‌اند؟ چرا؟

$B = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \rightarrow n(B) = ۴ \qquad P(B) = \frac{۴}{۱۰}$

$C = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\} \rightarrow n(C) = ۵ \qquad P(C) = \frac{۵}{۱۰}$

تمرین

$n(S) = ۶$

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\{۲، ۴، ۶\}$ $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\{۴، ۶\}$ $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. $\{۲\}$ $\frac{۱}{۶}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\{۱، ۲\}$ $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟ $\frac{۳}{۸}$

(د،د،د)، (پ،د،د)، (د،پ،د)، (پ،پ،د)، (د،د،پ)، (پ،د،پ)، (د،پ،پ)، (پ،پ،پ)

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد : $n(S) = ۱۲$

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{۴}{۱۲}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{۷}{۱۲}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{۸}{۱۲}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :

(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = ۳۶$) (۱،۱)، (۲،۲)، (۳،۳)، (۴،۴)، (۵،۵)، (۶،۶)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. (۲،۲)، (۲،۳)، (۲،۵)، (۳،۲)، (۳،۳)، (۳،۵)، (۵،۲)، (۵،۳)، (۵،۵) $\frac{۹}{۳۶}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{۶}{۳۶}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $\frac{۴}{۳۶}$ (۳،۳)، (۳،۶)، (۶،۳)، (۶،۶) د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{۶}{۳۶}$ (۱،۶)، (۲،۵)، (۳،۴)، (۴،۳)، (۵،۲)، (۶،۱)

خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم : در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزءِ نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.